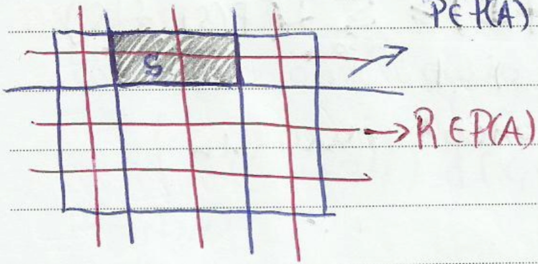
ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $P \in \mathcal{P}(A)$, $f: A \to \mathbb{R}$

Τότε f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $f|S$ ολοκληρώσιμη $\forall S \in S_P$

και $\int_A f = \sum_{S \in S_P} \int_S (f|S)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



($\Rightarrow$) Έστω $P = P_1 \times \dots \times P_n \in \mathcal{P}(A)$ η δοσμένη (σταθερή) διαμέριση του A σε υποορθογώνια $S \in S_P$ και $R = R_1 \times \dots \times R_n \in \mathcal{P}(A)$ μια τυχαία διαμέριση.

Τότε η $Q=(R_1 \cup P_1)\times\ldots\times(R_n\cup P_n)\in P(A)$ είναι μια εκλέπτυνση της R με $Q\cap S\in P(S)$

$\Rightarrow L(R,f)\le L(Q,f)\le \sum_{S\in S_P} L(f|S,\, Q\cap S)$, $\forall S\in S_P$

$\le \sum_{S\in S_P} Lf|S = \sum_{S\in S_P}\int (f|S).$

Και αντίστοιχα

$$U(R,f)\ge U(Q,f)\ge \sum_{S\in S_P} Uf|S$$

Άρα, $$Lf\le \sum_{S\in S_P} Lf|S \quad (1)$$

και

$$Uf\ge \sum_{S\in S_P} Uf|S \quad (2)$$

Διότι, Lf είναι το supremum του $L(f,R)$ συνόλου και το Uf είναι το infimum του $U(f,R)$ συνόλου

Και αφού f ολοκληρώσιμη τότε

$$Lf=Uf=\int_A f$$

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε

$$\int_A f = \sum_{S\in S_P}\int_S (f|S).$$

$(\Leftarrow)$: Έστω ότι $\forall S\in S_P$, έχουμε τις τυχαίες διαμερίσεις $P^{(S)}=P_1^{(S)}\times\ldots\times P_n^{(S)}\in P(S)$

Τότε $R=\left(\bigcup_{S\in S_P} P_1^{(S)}\right)\times\ldots\times\left(\bigcup_{S\in S_P} P_n^{(S)}\right)\in P(A)$

και κάθε

$R\cap S\in P(S)$ είναι μια εκλέπτυνση της $P(S)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow Lf\ge L(R,f)\ge \sum_{S\in S_P} L(R\cap S, f|S)\ge \sum_{S\in S_P} L(P(S), f|S)$

$\Rightarrow Lf\ge \sum_{S\in S_P} Lf|S$

όμοια και στα Uf άρα η f ολοκληρώσιμη

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων υπάρχει το πάρα πολύ σημαντικό Θεώρημα Fubini.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fubini)

(Για κλειστά ορθογώνια). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $B \subseteq \mathbb{R}^m$ κλειστά ορθογώνια και $f: A \times B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $A = [a_1, \beta_1] \times \ldots \times [a_n, \beta_n]$, $B = [\gamma_1, \delta_1] \times \ldots \times [\gamma_m, \delta_m] \Rightarrow$

$\Rightarrow A \times B = [a_1, \beta_1] \times \ldots \times [a_n, \beta_n] \times [\gamma_1, \delta_1] \times \ldots \times [\gamma_m, \delta_m] \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ κλειστό ορθογώνιο. Αν οι $f(x, \cdot): B \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες τότε η συνάρτηση $x \longmapsto \int_B f(x,y)\,dy$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $\int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{A \times B} f(x,y)\, d(x,y)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (1)

Για να ισχύει το Θεώρημα αυτό, θέλαμε να υπάρχει $\int_{A \times B} f$ και να υπάρχουν τα $\int_B f(x,y)\,dy$, $\forall x \in A$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (2)

Υπό τις ανάλογες προϋποθέσεις, ισχύει και

$$\int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{A \times B} f(x,y) \cdot d(x,y) \left(= \int_{B \times A} f(x,y)\, d(x,y) \right) =$$

$$= \int_{A \times B} f.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $B \subseteq \mathbb{R}^m$ κλειστά ορθογώνια και $f: A \times B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\forall x \in A$: $f(x, \cdot): B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $\forall y \in B$: $f(\cdot, y): A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε,

$$\int_{A \times B} f(x,y)\, d(x,y) = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dy$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω το ολοκλήρωμα: Η $2x+3y$ συνεχής $\Rightarrow$ Η $2x+3y$ ολοκληρώσιμη

$$\int_{[0,2] \times [3,4]} (2x+3y)\, d(x,y) = \int_0^2 \left(\int_3^4 (2x+3y)\,dy \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(\int_3^4 \left(2xy + 3\frac{y^2}{2}\right)' dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left[2xy + 3\frac{y^2}{2} \right]_3^4 dx = \int_0^2 \left(-6x - \frac{27}{2} + 8x + \frac{48}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2x + \frac{21}{2} \right) dx = \left[x^2 + \frac{21}{2}x \right]_0^2 = 4 + 21 + 0 = 25$$